Concursul Interjudeţean de Matematică "Cristian S. Calude"
Proba pe echipe, clasele IX-XII
27 octombrie 2013

Soluţii

RUNDA a II-a

Problema 1. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1^2-1}}}+\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2^2-1}}}+\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3^2-1}}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}=32+\sqrt{\frac{2049}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Soluţie: $\frac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2k+2\sqrt{k^2-1}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{2}}.$

Atunci membrul întâi devine:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1+\sqrt{4}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}-1\right).$$

Ecuaţia devine: $\sqrt{\frac{n}{2}}+\sqrt{\frac{n+1}{2}}=32+\sqrt{\frac{2049}{2}}\Rightarrow n=2048.$

Răspuns: $n=2048$

Problema 2. Să se determine numerele $a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0$, pentru care

$$\left|a\cdot x^2+b\cdot x+c\right|\leq\left(x-\frac{1}{a}\right)^2,(\forall)x\in\mathbb{R}.$$

Soluţie:

Pentru $x=\frac{1}{a}\Rightarrow\left|\frac{1}{a}+\frac{b}{a}+c\right|\leq 0\Rightarrow c=-\frac{1}{a}-\frac{b}{a};$

Substituind în inegalitatea din enunţ, obţinem că

$$\left|a\cdot x^2+b\cdot x-\frac{1}{a}-\frac{b}{a}\right|\leq\left(x-\frac{1}{a}\right)^2,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left|\frac{a^2\cdot x^2-1}{a}+b\cdot\left(x-\frac{1}{a}\right)\right|\leq\left(x-\frac{1}{a}\right)^2,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$$

$$\left|a\cdot\left(x-\frac{1}{a}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{a}\right)+b\cdot\left(x-\frac{1}{a}\right)\right|\leq\left(x-\frac{1}{a}\right)^2,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Notăm $x-\frac{1}{a}=y.$

Obţinem: $\left|a\cdot y^2+(b+2)\cdot y\right|\leq y^2,\forall y\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left|a\cdot y+b+2\right|\leq|y|,\forall y\in\mathbb{R}^*.$

Rezultă că $b+2=0$ şi $|ay|\leq|y|,\forall y\in\mathbb{R}^*\Rightarrow|a|\leq 1.$

Aşadar, $a\in[-1,0)\cup(0,1];\ b=-2;\ c=\frac{1}{a}.$

Răspuns: $a \in [-1,0) \cup (0,1];\ b=-2;\ c=\frac{1}{a}$.

Problema 3. Fie a,b,c,d numerele naturale astfel încât $\log_a b=\frac{3}{2}$ şi $\log_c d=\frac{5}{4}$. Dacă $a-c=9$, să se calculeze $b-c$.

Soluţie:

$\log_a b=\frac{3}{2}\Rightarrow b=a^{\frac{3}{2}};$

$\log_c d=\frac{5}{4}\Rightarrow d=c^{\frac{5}{4}}$

Deoarece $b^2=a^3\Rightarrow \exists u\in\mathbb{N}, u\geq 2$, astfel încât $b^2=a^3=u^6$;

Din $d^4=c^5\Rightarrow \exists v\in\mathbb{N},\ d^4=c^5=v^{20}$;

Aşadar, $a=u^2, b=u^3, c=v^4, d=v^5$;

Condiţia $a-c=9$ devine

$$u^2-v^4=9\Leftrightarrow (u-v^2)\cdot(u+v^2)=9\Rightarrow \begin{cases} u-v^2=1 \\ u+v^2=9 \end{cases}\Rightarrow u=5, v^2=4\Rightarrow v=2.$$

$b-d=u^3-v^5=5^3-2^5=93.$

Răspuns: 93.

Problema 4. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1>0,\ x_1+x_2+x_3+...+x_n=\frac{1}{\sqrt{x_{n+1}}}, n\geq 1.$ Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\cdot x_n^3\right)$.

Soluţie: $0<x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k-\sum\limits_{k=1}^{n-1}x_k=\frac{1}{\sqrt{x_{n+1}}}-\frac{1}{\sqrt{x_n}}\Rightarrow x_{n+1}<x_n.$ Rezultă că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi $x_{n+1}=\frac{x_n}{\left(x_n\cdot\sqrt{x_n}+1\right)^2}\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}x_n=0.$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\sqrt{x_n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{\sqrt{x_n^3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\frac{1}{\sqrt{x_{n+1}^3}}-\frac{1}{\sqrt{x_n^3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{x_n^3\cdot x_{n+1}^3}}{\sqrt{x_n^3}-\sqrt{\frac{x_n^3}{\left(1+x_n\cdot\sqrt{x_n}\right)^6}}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{x_{n+1}^3}}{\left(1+x_n\cdot\sqrt{x_n}\right)^3-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{x_n^3}}{3x_n\cdot\sqrt{x_n}+3\cdot x_n^3+x_n^4\cdot\sqrt{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+3\cdot\sqrt{x_n^3}+x_n^3}=\frac{1}{3}.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\cdot x_n^3\right)=\frac{1}{9}.$

Răspuns: $\frac{1}{9}$